
Couplage d'agrégation (2023/2024)



Marine bleue, Effet de Vague - Georges Lacombe - MBA de Rennes

Baptiste DUGUÉ

Table des matières

1	Épilogue	2
2	Liste des leçons 2023/2024	3
2.1	Algèbre et Géométrie	3
2.2	Analyse et Probabilités	4
3	Couplage	5
4	Développements mixtes	12
4.1	Théorème de Lie-Kolchin	12
4.2	Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov	13
4.3	Théorème de Cartan-Von Neumann (linéaire)	14
4.4	Fonction zeta et nombres premiers	15
4.5	Surjectivité de l'exponentielle matricielle	16
4.6	Quadrature de Gauss(-Legendre)	17
4.7	Point de Fermat d'un triangle	18
4.8	Théorème du point fixe de Brouwer par le lemme de Sperner	19
5	Développements Algèbre et Géométrie	20
5.1	$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$	20
5.2	Réduction des endomorphismes normaux	21
5.3	Construire un simplexe avec Cayley-Menger	22
5.4	Construction des codes cycliques, classes cyclotomiques	23
5.5	Corps des nombres algébriques	24
5.6	Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre	25
5.7	Présentation du groupe symétrique	26
5.8	L'unique entier entre un carré et un cube	27
5.9	Théorème de Wedderburn	28
5.10	Décomposition polaire	29
5.11	Décomposition de Bruhat et drapeaux	30
5.12	Théorème de Bézout faible (par le résultant)	31
5.13	Par cinq points passe une conique	32
5.14	Ellipse de Steiner	33
5.15	Théorème de Dirichlet (faible)	34
6	Développements Analyse et Probabilités	35
6.1	Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood	35
6.2	Un théorème de Grothendieck	36
6.3	Indécomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières	37
6.4	Équation de la chaleur sur le cercle	38
6.5	Théorème de Sunyer i Balaguer	39
6.6	Prolongement de la fonction Gamma d'Euler	40
6.7	Théorème de Stone-Weierstrass	41
6.8	Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente	42
6.9	Escalier de Cantor	43
6.10	Projection sur un convexe fermé	44
6.11	Lemme de la grenouille	45
6.12	Différentiabilité de l'exponentielle de matrices	46
6.13	Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendrés par les translatés	46
6.14	Théorème de Bohr-Mollerup	47
6.15	Formule de Stirling (par les intégrales de Wallis)	48
6.16	Théorème de Lévy et TCL	49
6.17	Injectivité de la transformée de Fourier	49

1 Épilogue

Voici mon couplage ! Il est loin d'être parfait, il y a sûrement des recasages un peu abusifs par endroits et des choix qui peuvent parfois surprendre. C'est en tout cas la version que j'avais au moment de passer mes oraux, et on ne peut de toutes façons pas tout explorer en une seule année de prépa agreg. Il y a des développements qui n'apparaissent pas ici et que j'aurais aimé avoir eu le temps, l'énergie et le courage de découvrir. Mais les maths ne s'arrêtent pas après les oraux, il sera toujours possible de s'y intéresser plus tard ! Faites ce que vous pouvez dans la mesure du possible, selon vos goûts et vos envies du moment, en essayant si possible de prendre du plaisir à faire des maths même dans un cadre aussi désagréable que celui d'un concours, et vous aurez déjà réussi la partie la plus importante de l'agrégation.

J'ai listé pour chaque leçon les développements de mon couplage qui pouvaient s'y retrouver, en surlignant ceux que je comptais effectivement présenter si je passais sur la leçon. En de rares occasions, il y a trois développements surlignés. Ce n'est pas que je comptais présenter les trois (je pense que c'est une assez mauvaise stratégie honnêtement, même si vous êtes sûr-e de vous), mais plutôt que je n'avais pas réussi à décider définitivement, soit parce que plusieurs développements me semblaient supers, soient parce qu'ils me semblaient tous aussi mauvais haha.

Aussi, au-delà de la pertinence du développement pour la leçon, ce qui rentrait beaucoup en jeu pour moi était ma maîtrise du développement et à quel point il me plaisait. Vous pouvez donc totalement changer les priorités des développements pour une leçon donnée sans que ce soit "moins bien" ! C'est quelque chose qui se voit assez bien dans la dernière partie du document, où j'expose rapidement chaque développement en listant les leçons dans lesquelles il se place. Il y a des développements que je place dès que possible parce que ce sont mes chouchous, et d'autres que j'essaie de remplacer au maximum parce que je ne les aime pas, voire qu'ils me font peur... Ça ne veut pas dire que ce sont de mauvais développements ! C'est juste une question de goûts.

Lorsque ça me paraissait pertinent, je n'ai pas hésité à renvoyer vers les documents d'autres personnes avec qui j'ai eu le plaisir de préparer l'agrégation. Merci en particulier à Matthias, Lucas et Alice pour leurs petits bouts de maths, et plus généralement pour leur bonne humeur cette année. Plus généralement, de gros bisous à la prépa agreg de Rennes (Adrienne, Alice, Anna, Clara, Gael, Jules, Lucas, Malo, Matthias...) ainsi qu'à ses encadrants aussi bienveillants qu'un jury d'agreg, à la ville de Rennes plus généralement (Arthur, Félix, Léa, Lucas, Nolwenn, Mattia, Samuel qui a dû subir un an de colocation agrégative...) et à toutes les autres personnes qui auront réussi à rendre plus douce cette année difficile, mais ô combien enrichissante.

Courage à toutes ! J'espère que vous trouverez un peu de bonheur dans les pages qui suivent.

2 Liste des leçons 2023/2024

2.1 Algèbre et Géométrie

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.
- 103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
- 104 Groupes finis. Exemples et applications.
- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 120 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
- 121 Nombres premiers. Applications.
- 122 Anneaux principaux. Exemples et applications.
- 123 Corps finis. Applications.
- 125 Extensions de corps. Exemples et applications.
- 127 Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.
- 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
- 144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- 148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 149 Déterminant. Exemples et applications.
- 150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
- 154 Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 155 Exponentielle de matrices. Applications.
- 156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- 161 Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.
- 162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.
- 171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- 181 Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

2.2 Analyse et Probabilités

- 201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 203 Utilisation de la notion de compacité.
- 204 Connexité. Exemples d'applications.
- 205 Espaces complets. Exemples et applications.
- 206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.
- 213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.
- 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.
- 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- 218 Formules de Taylor. Exemples et applications.
- 219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- 221 Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
- 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
- 234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
- 235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse
- 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- 244 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
- 246 Séries de Fourier. Exemples et applications.
- 250 Transformation de Fourier. Applications.
- 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.
- 261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- 266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

3 Couplage

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre
- Décomposition polaire
- Ellipse de Steiner
- Théorème de Wedderburn

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Théorème de Wedderburn

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- Théorème de Lie-Kolchin
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Présentation de $\mathfrak{S}_n$
- Théorème de Wedderburn

104 Groupes finis. Exemples et applications.

- Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre
- Présentation du groupe symétrique

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications

- Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre
- Présentation du groupe symétrique

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

- Théorème de Lie-Kolchin
- Théorème de Cartan-Von Neumann (linéaire)
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Décomposition polaire

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- Présentation du groupe symétrique
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre

120 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- Construction des codes cycliques, classes cyclotomiques
- Théorème de Dirichlet faible

121 Nombres premiers. Applications.

- Fonction zeta et nombres premiers
- Théorème de Dirichlet faible

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

- Corps des nombres algébriques
- L'unique entier entre un carré et un cube

- 123 Corps finis. Applications.**
- Construction des codes cycliques, classes cyclotomiques
 - Théorème de Wedderburn
- 125 Extensions de corps. Exemples et applications.**
- Construction des codes cycliques, classes cyclotomiques
 - Corps des nombres algébriques
- 127 Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.**
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
 - L'unique entier entre un carré et un cube
 - Corps des nombres algébriques
- 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**
- Construction des codes cycliques, classes cyclotomiques
 - Corps des nombres algébriques
- 142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**
- Théorème de Bézout faible (par le résultant)
 - L'unique entier entre un carré et un cube
- 144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications**
- Corps des nombres algébriques
 - Théorème de Bézout faible (par le résultant)
 - Construction des codes cycliques, classes cyclotomiques
 - Quadrature de Gauss(-Legendre)
 - Théorème de Wedderburn
- 148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**
- Théorème de Lie-Kolchin
 - Construire un simplexe avec Cayley-Menger
- 149 Déterminant. Exemples et applications.**
- Construire un simplexe avec Cayley-Menger
- 150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**
- Surjectivité de l'exponentielle matricielle
 - Réduction des endomorphismes normaux
 - Décomposition polaire
- 151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**
- Théorème de Lie-Kolchin
 - Réduction des endomorphismes normaux
 - $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- 152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**
- Réduction des endomorphismes normaux
 - Décomposition polaire

153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

- Théorème de Lie-Kolchin
- Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov

154 Exemples de décompositions de matrices. Applications.

- Décomposition polaire
- Décomposition de Bruhat et drapeaux

155 Exponentielle de matrices. Applications.

- Surjectivité de l'exponentielle matricielle
- Théorème de Cartan-Von Neumann (linéaire)

156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

- Théorème de Lie-Kolchin
- Décomposition de Bruhat et drapeaux

157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

- Réduction des endomorphismes normaux
- Décomposition polaire
- Construire un simplexe avec Cayley-Menger

158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

- Réduction des endomorphismes normaux
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre
- Décomposition polaire

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

- Réduction des endomorphismes normaux
- Quadrature de Gauss(-Legendre)

161 Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

- Point de Fermat d'un triangle
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Construire un simplexe avec Cayley-Menger
- Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

- Décomposition de Bruhat et drapeaux
- Par cinq points passe une conique

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
- Par cinq points passe une conique

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

- Par cinq points passe une conique
- Ellipse de Steiner

- 181 Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.**
- Théorème du point fixe de Brouwer par le lemme de Sperner
 - Construire un simplexe avec Cayley-Menger
 - Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**
- Théorème du point fixe de Brouwer par le lemme de Sperner
 - Théorème de Wedderburn
- 191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.**
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$
 - Construire un simplexe avec Cayley-Menger
 - Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre
 - Ellipse de Steiner
- 201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.**
- Un théorème de Grothendieck
 - Théorème de Stone-Weierstrass
- 203 Utilisation de la notion de compacité.**
- Théorème du point fixe de Brouwer par le lemme de Sperner
 - Décomposition polaire
 - Théorème de Stone-Weierstrass
 - Lemme de la grenouille
- 204 Connexité. Exemples d'applications.**
- Théorème de Lie-Kolchin
 - Surjectivité de l'exponentielle matricielle
 - Théorème de Sunyer i Balaguer
 - Lemme de la grenouille
- 205 Espaces complets. Exemples et applications.**
- Un théorème de Grothendieck
 - Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente
 - Projection sur un convexe fermé
- 206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.**
- Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov
 - Théorème de Cartan-Von Neumann (linéaire)
 - Un théorème de Grothendieck
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**
- Un théorème de Grothendieck
 - Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente
 - Projection sur un convexe fermé
- 209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.**
- Quadrature de Gauss(-Legendre)
 - Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood
 - Théorème de Stone-Weierstrass
- 213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.**
- Un théorème de Grothendieck
 - Projection sur un convexe fermé

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

- Théorème de Cartan-Von Neumann (linéaire)
- Surjectivité de l'exponentielle matricielle

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

- Théorème de Cartan-Von Neumann (linéaire)
- Point de Fermat d'un triangle
- Différentiabilité de l'exponentielle de matrices

218 Formules de Taylor. Exemples et applications.

- Quadrature de Gauss(-Legendre)
- Théorème de Sunyer i Balaguer

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- Projection sur un convexe fermé
- Point de Fermat d'un triangle

220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

- Différentiabilité de l'exponentielle de matrices
- Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendrés par les translatés

221 Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Équation de la chaleur sur le cercle
- Différentiabilité de l'exponentielle de matrices
- Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendrés par les translatés

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood
- Lemme de la grenouille
- Formule de Stirling (par les intégrales de Wallis)

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

- Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood
- Formule de Stirling (par les intégrales de Wallis)

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

- Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov
- Lemme de la grenouille

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

- Escalier de Cantor
- Théorème de Sunyer i Balaguer

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- Escalier de Cantor
- Théorème de Bohr-Møllerup

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

- Fonction zeta et nombres premiers
- Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood
- Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

- Un théorème de Grothendieck
- Équation de la chaleur sur le cercle
- Injectivité de la transformée de Fourier

235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse

- Théorème de Sunyer i Balaguer
- Prolongement de la fonction Gamma d'Euler
- Injectivité de la transformée de Fourier

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

- Quadrature de Gauss(-Legendre)
- Équation de la chaleur sur le cercle
- Prolongement de la fonction Gamma d'Euler
- Formule de Stirling (par les intégrales de Wallis)
- Injectivité de la transformée de Fourier

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Équation de la chaleur sur le cercle
- Prolongement de la fonction Gamma d'Euler
- Injectivité de la transformée de Fourier

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

- Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood
- Escalier de Cantor

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood
- Indécomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières

244 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

- Fonction zeta et nombres premiers
- Escalier de Cantor
- Prolongement de la fonction Gamma d'Euler
- Théorème de Bohr-Mollerup

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

- Indécomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières
- Prolongement de la fonction Gamma d'Euler

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

- Équation de la chaleur sur le cercle
- Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente

250 Transformation de Fourier. Applications.

- Théorème de Lévy et TCL
- Injectivité de la transformée de Fourier

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

- Projection sur un convexe fermé
- Théorème de Bohr-Mollerup

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

- Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov
- Indécomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières
- Théorème de Lévy et TCL

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

- Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov
- Théorème de Lévy et TCL

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

- Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov
- Fonction zeta et nombres premiers
- Indécomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

- Fonction zeta et nombres premiers
- Indécomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières

4 Développements mixtes

4.1 Théorème de Lie-Kolchin

Leçons concernées : **103, 106, 148, 151, 153, 156, 204**

Peut-être mon développement préféré, que j'ai eu le plaisir de présenter à mon oral d'algèbre (pour la leçon 148). Il s'énonce en une phrase : Tout sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de trigonalisation commune à tous les éléments du groupe. C'est de la très jolie algèbre linéaire avec récurrence sur la dimension, sous-espaces stables et tout le tralala, avec un soupçon de topologie à la fin qui rend le développement vraiment adapté pour la leçon sur la connexité. Les grandes lignes de la preuve sont les mêmes que pour celle du théorème de Lie sur les algèbres de Lie résolubles. Cette dernière remarque est complètement hors du cadre de l'agrégation, mais si vous pensez vous intéresser un jour à la théorie de Lie, vous serez bien content-e de repenser avec nostalgie à ce théorème le jour où votre prof de M2 fera une démonstration à vitesse grand V que vous pourrez vous satisfaire d'avoir compris à l'avance !

Références : L'essentiel de la preuve se trouve dans NH2G2 (Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométrie (Caldero-Germoni)) et les choses y sont bien faites. Pour les détails sur les liens entre groupe dérivé et connexité, on peut aussi aller voir la preuve du théorème dans Algèbre corporelle (Chambert-Loir). Pour se mettre les idées au clair sur les groupes résolubles, le Théorie des groupes de Ulmer est super. Un point technique à côté duquel il est facile de passer est le détail de ce qui se passe quand on fait la récurrence "dans le bloc en bas à droite". C'est une histoire d'endomorphisme qui passe au quotient par un sous-espace stable, mais si cela vous semble bien mystérieux, peut-être que vous pourriez y voir plus clair en allant (re ?) lire la partie dédiée à l'algèbre linéaire de Objectif Agrégation (Beck, Malick, Peyré). Enfin, deux recommandations de lectures qui ne sont pas des livres :

La version de Eliot Hecky est très claire et contient de nombreuses remarques précieuses que je ne saurais trop vous encourager à lire, relire et relire.

À la fin du document précédent, Eliot se demande quoi répondre à la question que tout-e mathématicien-ne redoute aux repas de famille (ou pendant un oral...) : "C'est bien joli tout ça, mais à quoi ça sert ?". Lucas Toury s'est creusé la tête une bonne partie de l'année et a fini par trouver une réponse (avec l'aide de Matthieu Romagny). Il en parle dans son merveilleux document Développements pour groupistes-topologues que vous devez absolument aller lire si vous êtes en train de lire ces mots. On a beaucoup de goûts et donc de développements en commun, et ses conseils/remarques sont toujours très avisées !

4.2 Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov

Leçons concernées : **153, 226, 261, 262, 264**, 206

En voilà un gros développement ! Il faut dire que les développements longs comme le bras, c'est un peu la signature de notre Matthias national (au merveilleux site ici) qui a été mon inspiration pour celui-ci (et pour d'autres !). Vous pouvez trouver sa version de ce dév ici. Comme vous pouvez le constater, il y a de quoi faire, peut-être même trop. Pour ma part je me contentais du cas strictement positif et je me plaçais dans cette configuration pour l'application derrière. Ce choix était aussi motivé par l'étude de ce texte d'option C écrit par Lionel Fourquaux sur lequel j'ai travaillé pendant ma préparation. La dernière partie montre que dans les faits on se ramène toujours à une matrice strictement positive pour déterminer la mesure invariante !

Concrètement, c'est un moyen malin de faire de l'algèbre linéaire dans les leçons de probas et de raconter des choses intéressantes dans deux leçons qui ne paient vraiment pas de mine.

Référence : Tout est très bien fait dans Probabilités pour les non probabilistes, Appel.

4.3 Théorème de Cartan-Von Neumann (linéaire)

Leçons concernées : **106, 155, 206, 214, 215**

Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété (pour ne pas dire un groupe de Lie!). C'est le résultat à la base de la théorie des groupes de Lie classiques! Il existe une version plus générale dans le langage des groupes de Lie (qui ne sont pas tous des groupes classiques, comprendre des sous-groupes de GL_n) qui se déduit en fait immédiatement de cet énoncé. C'est un développement ambitieux qui utilise finement le théorème d'inversion locale et qui vous amènera à découvrir plein de choses merveilleuses plus tard!

Référence : Analyse pour l'agrégation de mathématiques, Bernis-Bernis

4.4 Fonction zeta et nombres premiers

Leçons concernées : **121, 230, 244, 266**, 264

On calcule par des méthodes probabilistes (oui oui!) le développement eulérien de ζ , c'est-à-dire le fait que pour tout $s > 1$, on a :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

On en déduit élégamment la divergence bien connue de la série des inverses des nombres premiers.

Encore un marouflage pour faire des probas, sans vraiment faire de probas ! (Merci Mathias !)

Référence : Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie, Rombaldi

4.5 Surjectivité de l'exponentielle matricielle

Leçons concernées : **150, 155, 214**, 204

$\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$, $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2 | A \in GL_n(\mathbb{R})\}$, version polynômes d'endomorphismes et théorème d'inversion locale.

Référence : Un max de maths, Zavidovique

4.6 Quadrature de Gauss(-Legendre)

Leçons concernées : **159, 218, 236**, 144, 209

L'objectif de ce développement mixte est de présenter la théorie élémentaire derrière une méthode de calcul approché d'intégrales, la méthode de quadrature de Gauss.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel. On munit l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n du produit scalaire où pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)^1$.

On montre plusieurs résultats :

Lemme. *Le polynôme P_n possède n racines distinctes dans $] -1, 1[$.*

Notons donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P_n , $L_1, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à cette famille (i.e. les polynômes de degré $n-1$ tels que pour tous indices i, j , on ait $L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$) et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = \int_{-1}^1 L_i(t)dt$.

Proposition. *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a*

$$\int_{-1}^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i).$$

Théorème. *Pour $f \in \mathcal{C}^{2n}([-1, 1], \mathbb{R})$, on note $I(f) := \int_{-1}^1 f(t)dt$ et $S_n(f) := \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\alpha_i)$. Alors*

$$|I(f) - S_n(f)| \leq \frac{4M}{(2n+1)!}, \text{ avec } M := \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(2n)}(x)|.$$

Références : La partie algèbre est dans le Carnet de voyage en Algérie (Caldero-Peronnier) et tout le reste est dans le Carnet de voyage en Analystan (Caldero) mais avec beaucoup de coquilles et un ordre de présentation qui rend le tout un peu confus. J'ai pris le temps d'écrire un document qui présente les choses dans l'ordre que je préférais.

1. Les polynômes ainsi obtenus sont appelés polynômes de Legendre, d'où le nom de ce développement.

4.7 Point de Fermat d'un triangle

Leçons concernées : **215, 219**, 161

On considère un triangle ABC "pas trop plat" (comprendre dont tous les angles valent au moins $\frac{2\pi}{3}$) et la fonction f qui associe à un point X du plan la somme des distances $AX+BX+CX$. On construit géométriquement le point réalisant le minimum de f à l'aide d'outils de calcul différentiel.

Références : Le PGCD (Petit Guide du Calcul Différentiel) de Rouvière et le Carnet de voyage en Analystan (Caldero).

4.8 Théorème du point fixe de Brouwer par le lemme de Sperner

Leçons concernées : 181, 190, 203

Une "proof from the Book" de ton théorème du point fixe préféré. Pour des raisons de clarté, on expose la preuve en dimension 2 en commençant par un lemme combinatoire :

Lemme. (Sperner) *On considère un triangle ABC triangulé par une triangulation $\mathcal{T}$. On colore $\mathcal{T}$ en attribuant à chaque sommet de $\mathcal{T}$ une couleur Rouge, Vert ou Bleu en suivant les règles suivantes :*

- *Les sommets A, B, C sont coloriés différemment.*
- *Un sommet de $\mathcal{T}$ situé sur le segment $[AB]$ est colorié de la même couleur que le sommet A ou que le sommet B (idem pour les autres segments).*
- *Les autres sommets de $\mathcal{T}$ sont coloriés arbitrairement.*

Alors il existe (au moins) une cellule ("un petit triangle") de $\mathcal{T}$ dont les sommets sont tous coloriés différemment.

De façon miraculeuse, le théorème de Brouwer en découle très simplement !

Théorème. (Brouwer) *Une application continue d'un compact convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans K admet un point fixe.*

Qui eût cru qu'on pourrait parler de triangulations à un jury d'agreg ! Ce n'est pas de l'abus que de dire ça, la généralisation aux dimensions supérieures se déroule exactement de la même façon, mais en considérant des simplexes triangulés et coloriés avec autant de couleurs que le nombre de leurs sommets.

Référence : Raisonnements divins, Aigner

5 Développements Algèbre et Géométrie

5.1 $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions : $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$

Leçons concernées : **101, 102, 103, 106, 108, 127, 158, 170, 191**, 151, 161

Ou, dit de façon plus pédante, la plus jolie preuve du fait que le groupe fondamental de $SO_3(\mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est l'un de mes développements, et même théorèmes, préférés. J'espère trouver le temps d'écrire un document à ce sujet un jour pour le relire à la lumière de la théorie de Lie.

Références : NH2G2 deuxième tome, ou le Perrin.

5.2 Réduction des endomorphismes normaux

Leçons concernées : **150, 151, 152, 157, 158, 159**

Les endomorphismes normaux (ce sont ceux qui commutent à leur adjoint) sont diagonalisables par blocs. De l'algèbre linéaire pure et dure, longue mais pas trop compliquée. C'est un bon investissement de travailler ce développement pour se refamiliariser avec les techniques classiques d'algèbre linéaire à l'agreg !

Référence : Je suivais complètement la preuve de Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie, Rombaldi.

5.3 Construire un simplexe avec Cayley-Menger

Leçons concernées : 148, 149, 161, 181, 191, 157

Si on se donne trois longueurs a , b , c , peut-on toujours construire un triangle dont les côtés ont ces longueurs ? Eh non, il faut (et il suffit) que ces trois quantités vérifient l'inégalité triangulaire ! Ce développement propose de traiter le même problème mais cette fois pour un n -simplexe en général, tout ça en étudiant un joli déterminant (dont on admet des propriétés très calculatoires), celui de Cayley-Menger.

Référence : Un max de maths, Zavidovique

5.4 Construction des codes cycliques, classes cyclotomiques

Leçons concernées : **120, 123, 125, 141, 144**

Développement maison!! On identifie les codes cycliques avec les idéaux de $\frac{\mathbb{F}_q[X]}{X^n-1}$ et on factorise $X^n - 1$ dans $\mathbb{F}_q[X]$ (quand n et q sont premiers entre eux) en passant par les polynômes cyclotomiques. Un PDF clean arrivera (un jour...), mais en attendant il y a toujours ce brouillon.

Référence : Cours d'algèbre de Demazure, **la deuxième édition!!** Attention! Les deux éditions se ressemblent énormément (même couverture, quasiment le même contenu, sauf pour le contenu de ce développement...), il faut regarder le début du livre pour vérifier qu'on y trouvera bien ce qu'on cherche.

5.5 Corps des nombres algébriques

Leçons concernées : **122, 125, 141, 144**

On montre en repartant d'un niveau élémentaire que l'ensemble des nombres algébriques sur un corps est un corps, qui est de plus algébriquement clos si c'est le cas du corps de base.

Référence : Gourdon Algèbre

5.6 Détermination des groupes d'isométries du cube et du tétraèdre

Leçons concernées : **101, 104, 105, 161**, 108, 158, 181, 191

Développement au sujet duquel je ne savais toujours pas exactement ce que je comptais raconter le jour J. Il y a plein de jolies choses à dire, qu'on peut choisir de développer ou non selon la leçon. L'idée centrale est toujours la même, déterminer les groupes d'isométries (directes ou non) du cube, en passant par les groupes du tétraèdre. Après ça on peut faire plusieurs jolies applications (certaines personnes proposent de s'intéresser à des problèmes de dénombrement, d'autres d'étudier des tables de caractères, moi j'aimais bien retrouver géométriquement des Sylows) ou explorer les réalisations géométriques de groupes de permutations.

Références : C'est très bien fait dans le deuxième tome des Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométrie (Caldero-Germoni) qu'on peut compléter par le Carnet de voyage en Algérie si on veut. Pour aller encore plus loin, on peut se plonger intensément dans le fabuleux "petit livre sur $\mathfrak{S}_4$ " de Debreil et Mneimné : Le groupe symétrique S_4 et ses métamorphoses.

5.7 Présentation du groupe symétrique

Leçons concernées : **104, 105, 108**, 103

Craquage de fin d'année qui m'amusa beaucoup. Je pense vraiment que c'est un joli développement (même s'il est technique et calculatoire), mais je ne sais pas si j'irais jusqu'à raisonnablement le recommander pour l'agreg. Concrètement, on démontre que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est bien égal à sa présentation de Coxeter, c'est-à-dire que :

$$\mathfrak{S}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \mid \tau_i^2 = 1, \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ si } |i - j| > 1, (\tau_i \tau_{i+1})^3 = 1 \rangle.$$

Référence : Un max de maths, Zavidovique

5.8 L'unique entier entre un carré et un cube

Leçons concernées : **122, 127, 142**

$5^2 + 1 = 26 = 3^3 - 1$. Un résultat mignon qui remplit des leçons pénibles.

Référence : 131 devs

5.9 Théorème de Wedderburn

Leçons concernées : **102, 123, 190**, 101, 103, 144

"Tout corps fini est commutatif". Une démonstration splendide ! On raisonne avec des polynômes cyclotomiques et un argument géométrique qui vous séduira assurément par son adorable simplicité.

Références : Le Cours d'algèbre de Perrin, et Raisonnements Divins de Aigner (pas nécessaire, mais ce livre est un bijou)

5.10 Décomposition polaire

Leçons concernées : **152, 154, 157**, 106, 150, 158, 203

Toute matrice inversible réelle s'écrit de manière unique comme produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive. On peut facilement généraliser le résultat aux matrices complexes (et même aux groupes/algèbres de Lie, c'est la décomposition de Cartan).

Encore une jolie démonstration qui vaut le coup d'œil même en dehors du cadre de l'agreg, juste pour le plaisir ! Et puis pour la culture aussi, quand même, c'est pratique la décomposition polaire !

Références : Rombaldi ou NH2G2, par exemple.

5.11 Décomposition de Bruhat et drapeaux

Leçons concernées : **154, 156, 162**

En notant T_s l'ensemble des matrices supérieures de $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$GL_n(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_s P_\sigma T_s.$$

On en déduit que l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur les couples de drapeaux est indexée par $\mathfrak{S}_n$.

Référence : Oraux X-ENS Algèbre 1, FGN

5.12 Théorème de Bézout faible (par le résultant)

Leçons concernées : **142, 144, 149**

Sponsorisé par l'option C.

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ premiers entre eux de degrés respectifs d et d' et $V(P), V(Q)$ les courbes algébriques associées (i.e. $V(P) = \{(x, y) | P(x, y) = 0\}$, et $V(Q) = \{(x, y) | Q(x, y) = 0\}$). Alors $V(P)$ et $V(Q)$ s'intersectent en au plus dd' points.

Référence : Isenmann-Pecatte

5.13 Par cinq points passe une conique

Leçons concernées : **162, 170, 171**

Beurk les coniques, mais cette démonstration est un peu rigolote quand on a compris ce qui se passe (je ne garantie pas que ce fût vraiment mon cas).

Référence : Géométrie analytique classique, Eiden

5.14 Ellipse de Steiner

Leçons concernées : **171**, 101, 191

Un joli résultat dont l'idée de la preuve tient en fait en une phrase : les applications affines conservent les milieux et l'image continue d'un compact est compacte. C'est surtout une belle façon de parler de coniques sans faire de calculs indigestes.

Référence : Carnet de voyage en Algérie

5.15 Théorème de Dirichlet (faible)

Leçons concernées : **120, 121**

Le théorème de progression arithmétique de Dirichlet dit que pour tout couple d'entiers (m, n) premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à m modulo n (autrement dit, la suite arithmétique de premier terme m et de raison n possède une infinité de termes premiers). On propose ici de démontrer une version "faible" de ce résultat, à savoir uniquement le cas " $m = 1$ ". Fun fact : d'une certaine façon, cette preuve est une généralisation de la preuve d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers !

Référence : La toute fin du Carnet de voyage en Algérie

6 Développements Analyse et Probabilités

6.1 Un théorème taubérien de Hardy-Littlewood

Leçons concernées : **209, 223, 224, 230, 241, 243**

Une preuve vraiment, mais alors vraiment magique qui illustre à merveille la leçon sur l'approximation par des fonctions régulières.

Supposons que $a_n \geq 0$ pour tout n , et que lorsque x tend vers 1 on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x}.$$

Alors quand n tend vers l'infini on a

$$\sum_{k=0}^n a_k \sim n.$$

Références : Alors moi je l'ai déniché dans le livre The Theory of Functions de Titchmarsh qui parle de choses que je n'ai vues nulle part ailleurs, mais malheureusement il n'est pas dit que vous trouviez facilement cette référence... Dans le doute vous pouvez toujours aller voir le 131 développements, ou mes notes que j'espère lisibles.

6.2 Un théorème de Grothendieck

Leçons concernées : **201, 205, 206, 208, 213 , 234**

Avant de révolutionner la géométrie, de se battre contre l'impérialisme occidental en allant enseigner l'algèbre homologique dans un Vietnam bombardé et de tourner complètement le dos à la communauté mathématique, Grothendieck a commencé par tuer l'analyse fonctionnelle. Ce développement est un exemple des résultats de cette première époque, qui donne des conditions sur la dimension des sous-espaces fermés de certains L^p . En particulier, cela nous donne donc des informations sur ce qu'il est possible, ou non, d'espérer quand on cherche à construire des espaces de Banach (les L^p sont complets et un fermé dans un complet est complet !). Voici l'intitulé :

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure finie et $p \geq 1$. Alors si V est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ inclus dans $L^\infty(\mu)$, il est de dimension finie.

Références : Faire un mix entre Bernis-Bernis et Un max de maths (Zavidovique). Attention à ne pas mélanger les notations !

6.3 Indécomposabilité de la loi de Poisson par les séries entières

Leçons concernées : **243, 245, 261, 264, 266**

Encore une (jolie!) façon de faire des probas sans jamais en faire.

Il est bien connu que si deux variables aléatoires indépendantes suivent des lois de Poisson, alors leur somme est aussi une Poisson. Mais la réciproque est-elle vraie ? C'est l'objet de développement : Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes dont la somme suit une loi de Poisson, alors X et Y suivent des lois de Poisson.

La preuve se fait en travaillant entièrement sur des séries génératrices, qu'on voit comme des fonctions analytiques, donc holomorphes, et ça on aime !

Référence : Analyse complexe et applications (Queffélec-Queffélec)

6.4 Équation de la chaleur sur le cercle

Leçons concernées : **221, 234, 239, 246**, 236

Un développement que j'ai fui pendant toute l'année parce que j'avais très peur des équations différentielles et des séries de Fourier, et finalement j'aurais aimé qu'on me montre cette démonstration plus tôt. C'est en fait assez joli et pas si compliqué, et en plus c'est très intéressant historiquement (à ce sujet, avez-vous déjà pris le temps de vous intéresser à la vie de Joseph Fourier ? Au programme : un jeune garçon détourné (sauvé ?) d'une carrière religieuse par la Révolution française, un égyptologue précurseur de Champollion, et un scientifique souffrant constamment du froid alors qu'il développe une théorie de la chaleur...). Pour revenir au développement, voici ce qu'on démontre :

Soit $u_0 \in L^2([0, 2\pi])$ de coefficients de Fourier d_n . Alors il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $\forall t > 0, u(t, \cdot)$ est 2π -périodique,
- les fonctions $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont bien définies et égales sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
- $u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{L^2} u_0$.

De plus, u est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Référence : C'est très bien expliqué dans L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte pour peu qu'on comprenne les notations (comme souvent en analyse...)

6.5 Théorème de Sunyer i Balaguer

Leçons concernées : **204, 218, 228, 235**

Super développement assez visuel mais difficile à faire tenir en 15 minutes ! C'est une jolie application pas si simple du théorème de Baire. Je vous conseille d'aller lire la fin du Gourdon Analyse sur cette thématique qui pourra vous aider à remplir plusieurs leçons d'analyse un peu pourries avec de jolies maths !

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la dérivée n -ième de f s'annule en x . Alors f est un polynôme ! (Autrement dit, on passe de " $\forall x, \exists n$ " à " $\exists n, \forall x$ ". Avec ce point de vue et le fait qu'on utilise le théorème de Baire, on est à fond dans l'interversion de quantificateurs !)

Je vous renvoie aux documents de Lucas pour des explications sur les recasages (surprenants ?) et de Eliot pour de nombreuses remarques et mises en garde instructives.

Référence : Gourdon Analyse

6.6 Prolongement de la fonction Gamma d'Euler

Leçons concernées : **235, 236, 239, 244, 245**

Γ se prolonge de façon méromorphe au plan complexe avec des pôles en les entiers négatifs. Il y a plein de façons de le montrer, moi je le faisais en suivant la version d'Objectif Agrégation en utilisant un théorème "de Weierstrass" sur les séries de fonctions méromorphes. Je l'ai rédigé à la fin de ce document.

Références : Objectif Agrégation (BMP), qui cite le Zuily-Queffélec. Pour le théorème sur les séries de fonctions méromorphes, la meilleure réf que j'aie trouvé est Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes de Henri Cartan, un bijou trop peu connu !

6.7 Théorème de Stone-Weierstrass

Leçons concernées : **201, 203, 209**

"Toute fonction continue sur un compact y est limite uniforme de polynômes."

Un super joli théorème bien pratique. Je fais la version "générale" du livre de Daniel Li.

Référence : Comme dit plus haut, c'est nickel dans le Analyse fonctionnelle de Daniel Li

6.8 Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente

Leçons concernées : **205, 208, 246, 230**

Encore un développement sur lequel je me suis penché à la toute fin de ma préparation et que j'aurais aimé découvrir plus tôt. Comme pour Sunyer i Balaguer, c'est une application du théorème de Baire, pratique si on a des penchants pour l'analyse fonctionnelle et la topologie !

On commence par démontrer le théorème de Banach-Steinhaus qui dit que si E est un Banach et F un EVN et que si la quantité $\sup_{f \in \mathcal{L}(E,F)} \|f\|$ vaut $+\infty$, alors il existe un $x \in E$ tel que $\sup$ des évaluations en x vaille $+\infty$: $\sup_{f \in \mathcal{L}(E,F)} \|f(x)\| = +\infty$. On en déduit l'existence de fonctions continues 2π -périodiques dont la série de Fourier diverge en un point (par exemple en 0) en considérant la suite de fonctions $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$l_n : f \mapsto \sum_{p=-n}^n c_p(f).$$

Références : Gourdon Analyse et L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte

6.9 Escalier de Cantor

Leçons concernées : **228, 229, 241, 244**

Développement sympa mais un peu salissant, attention à ne pas se prendre les pieds dans le tapis ! On construit proprement (ce qui ne veut pas dire que c'est joli-joli) le fameux "escalier du diable", une fonction $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ continue et croissante, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, dérivable sur $[0, 1] \setminus C$ (où C désigne l'ensemble triadique de Cantor) avec pour tout $x \in [0, 1] \setminus C$, $f'(x) = 0$.

Un classique de prépa, pour des leçons de prépa... Que j'ai quand même pris le temps de bien rédiger ici pour votre plus grand plaisir.

Référence : Analyse. Théorie de l'intégration, Brian-Pagès

6.10 Projection sur un convexe fermé

Leçons concernées : **213, 219, 253**, 205, 208

Ultra classique (à tel point que j'ai la flemme de recopier l'énoncé...), une preuve pas si mal en soi mais je la trouve stressante en temps limité parce qu'il y a quelques astuces de calcul et qu'on a vite l'air idiot-e si on bug sur ce qui est considéré comme un développement "simple"... Mais bon ça reste quand même parmi ce qui se fait de mieux pour les leçons dans lesquelles on le retrouve.

Référence : Ca se trouve partout, faites votre choix entre Gourdon, Li, Hirsch...

6.11 Lemme de la grenouille

Leçons concernées : **203, 204 223, 226**

Un développement a-do-rable!!! Peut-être que son titre met à mal ma neutralité, surtout quand on sait qu'on a en fait un peu tué la grenouille dans l'histoire... Plus sérieusement il est vraiment sympa, pas trop compliqué sans être trop simple, il rend intéressantes des leçons qui donnent envie d'en finir avec l'agreg sans attendre juillet, il amène à faire des dessins... Non, vraiment, y a pas à dire, c'est un super développement.

Lemme. Soit (u_n) une suite dans (E, d) un espace métrique compact telle que $d(u_{n+1}, u_n)$ tende vers 0. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) est connexe.

Corollaire. (Lemme de la grenouille) Soit $f \in C^0([0, 1], [0, 1])$ et (u_n) définie par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors (u_n) converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Références : Gourdon Analyse pour le premier lemme, FGN Orlaux X-ENS Analyse 1 pour la grenouille (d'ailleurs l'exercice y est fait d'une façon plus élémentaire, en "faisant de petits sauts"... C'est de là que vient la grenouille! C'est un bon exercice d'essayer de la retrouver dans le premier lemme, elle est toujours là mais un peu cachée;))



Une grenouille qui se cache - Brian Atwicke

6.12 Différentiabilité de l'exponentielle de matrices

Leçons concernées : **220, 221**, 155, 215

Très honnêtement, je n'ai pas vraiment travaillé ce développement et le suivant. Je savais que j'irais les regarder si je devais passer sur des équas diffs le jour J, mais j'aurais pris à peu près n'importe quelle autre leçon à la place, donc à moins de tomber sur un couplage 220-221 ça ne risquait pas d'arriver. Je n'ai donc pas grand chose à raconter sur ce développement, mais j'essaierai de m'y intéresser plus un jour !

Référence : PGCD Rouvière

6.13 Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendrés par les translatés

Leçons concernées : **220, 221**, 148, 159, 228

Même situation que pour le théorème précédent... Ce développement a visiblement plein de recasages, mais je ne sais pas s'il est vraiment si intéressant que ça.

Référence : FGN Oaux X-ENS Algèbre 1

6.14 Théorème de Bohr-Mollerup

Leçons concernées : **229**, **253**, 244

Encore un théorème mignon et un peu magique ! C'est une preuve originale et sympa qui roule bien, et qui permet de changer un peu de l'étude de la fonction Γ qui est un peu vue et revue...

Le théorème dit que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est caractérisée par le fait de valoir 1 en 1, de vérifier pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et d'être log-convexe ($\ln \circ \Gamma$ est convexe).

Référence : C'est très bien fait dans Carnet de voyage en Analystan (Caldero), et on y apprend d'ailleurs plein d'autres choses sur Γ !

6.15 Formule de Stirling (par les intégrales de Wallis)

Leçons concernées : **224, 236**, 223

Une démonstration classique de classes prépas qui sert surtout à remplir des leçons... de classes prépas. Il n'y a pas grand chose à dire de plus honnêtement.

On veut donc montrer la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. On commence par la montrer à une constante multiplicative près, et on détermine ensuite cette constante en étudiant les intégrales de Wallis, définies par, pour tout entier n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx.$$

Référence : J'ai dit que c'était un truc de classes prépas, et vous me demandez quand même la réf?! (C'est le Gourdon Analyse)

Les deux derniers théorèmes qui suivent sont très jolis et fondamentaux, mais je n'étais pas du tout à l'aise avec eux, notamment parce que je n'y connaissais pas grand chose en transformation de Fourier et en classes de Schwarz... J'ai vu des gens beaucoup s'amuser en les travaillant (et ça a aussi pu m'arriver d'ailleurs), mais moi ils me faisaient surtout très peur... Je les ai un peu délaissés vers la fin en priant pour ne pas tomber sur la leçon 250... Heureusement la formidable Alice est là pour nous porter secours.

6.16 Théorème de Lévy et TCL

Leçons concernées : **250**, **262**, 261

Quel dommage, c'est pourtant un théorème primordial, et même central dans l'existence! Franchement la preuve est cool, mais pour tout faire correctement (c'est-à-dire pour commencer par démontrer le théorème de Lévy) ça demande quand même de sacrément se remonter les manches.

Je vous conseille d'aller lire les notes d'Alice si vous voulez vous lancer. Elle est toujours extrêmement claire et les probas c'est son dada. On a tous besoin d'une Alice dans la vie!

Références : les notes d'Alice. Et pour quelque chose d'exploitable le jour J, Bernis-Bernis et Zuily-Queffelec.

6.17 Injectivité de la transformée de Fourier

Leçons concernées : **250**, 234, 235, 236, 239

Franchement, je trouve ce développement terrifiant. Tout me paraît compliqué et affreusement calculatoire, mais bon comme dit précédemment, heureusement Alice est là! Voici ses notes.

Référence : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani