

Lemme de la grenouille (sans grenouille)



Gaudon p. 46
 FGN Analyse 1 p. 83

On montre le lemme de la grenouille en corollaire d'un résultat plus général bien topologique comme on aime.

Lemme 1: Soit (u_n) une suite dans (E, d) un métrique compact telle que $d(u_n, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors l'ensemble $V = \{\text{valeurs d'adhérence de } (u_n)\}$ est connexe.

Preuve. On note $\forall k \geq 0, A_k = \{u_n / n \geq k\}$, de telle sorte que $V = \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$. Alors V est fermé comme intersection de fermés, donc compact comme fermé dans un compact.

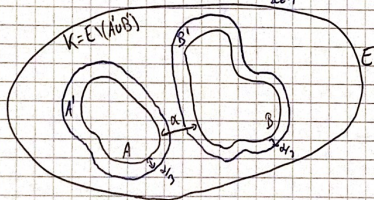
Par l'absurde, supposons V non connexe : $V = A \cup B$ avec A, B fermés non vides.

A et B sont donc compacts comme fermés dans un compact, donc $\alpha = d(A, B) > 0$.

Détail: Supposons $d(A, B) = 0$. Alors $\exists (x_n) \in A \cap B$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, B) = 0$

L'application $d(\cdot, B)$ est continue puisque 1-lipschitzienne, donc comme A compact, quelle à extraire, ops $x_n \rightarrow x \in A$ et donc $d(x, B) = 0$. Or B est fermé, donc cela implique $x \in B$ (car x est limite d'éléments de B), $\hat{e}$ car $A \cap B = \emptyset$.

On peut donc considérer $A' := \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{\alpha}{3})$ et $B' := \bigcup_{x \in B} B(x, \frac{\alpha}{3})$.



On pose $K = E \setminus (A' \cup B')$ qui est donc fermé et donc compact. On va montrer que K contient une valeur d'adhérence de (u_n) , ce qui est bien absurde.

$d(u_n, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ soit donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, d(u_n, u_n) < \frac{\alpha}{3}$.

Soit $N \geq N_0$ quelconque.

Soit $x_0 \in A$. Alors $x_0 \in V$, donc $\exists m_1 > N$ tq $d(u_{m_1}, x_0) < \frac{\alpha}{3}$, i.e. $u_{m_1} \in A'$

De même, soit $y_0 \in B$. Alors $y_0 \in V$, donc $\exists m_2 > m_1$ tq $d(u_{m_2}, y_0) < \frac{\alpha}{3}$ i.e. $u_{m_2} \in B'$.

Soit maintenant m_0 le plus petit entier $> m_1$ tq $u_{m_0} \notin A'$ (possible car $u_{m_2} \notin A'$).

Alors $u_{n_0-1} \in A'$ et on a

$$d(u_{n_0}, B) \geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0}, u_{n_0-1}) \geq d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0}, u_{n_0-1}) > \frac{\alpha}{3}$$

Donc $u_{n_0} \notin B'$. Donc $u_{n_0} \in K'$. Ainsi $\forall N \geq N_0$, on a trouvé un m_0 tel que $u_{m_0} \in K$. Cette opération se répète, on a donc une sous-suite $(u_{p(n)})$ à valeurs dans K . Comme K compact, $(u_{p(n)})$ a atteint une valeur d'adhérence, donc (u_n) aussi, & car $K \cap V = \emptyset$. Donc V est connexe.

Corollaire (Lemme de la grenouille): Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], [0,1])$ et (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{Alors } (u_n) \text{ converge si } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Preuve: Évidemment, si (u_n) converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Réciproquement, supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Alors par le lemme 1, $V = \{ \text{valeurs d'adh de } (u_n) \}$ est convexe, contenu dans $[0,1]$, et fermé. Donc $V = [\alpha, \beta]$.

Par l'absurde, si $\alpha \neq \beta$, alors $\frac{\alpha+\beta}{2} \in V$, donc $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que u_m proche de $\frac{\alpha+\beta}{2}$, i.e. $u_m \in [\alpha, \beta]$.

Or, pour $l \in [\alpha, \beta] = V$, $\exists \varphi \gg 1$ tel que $u_{\varphi(n)} \rightarrow l$. Par continuité de f , $f(u_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l)$ et comme $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $f(l) = l$.

Ainsi $f(u_{m_0}) = u_{m_0+1}$, $f^2(u_{m_0}) = u_{m_0+2}$... en fait (u_n) est stationnaire en u_{m_0} donc converge, absurde car on a supposé $\alpha \neq \beta$.

Donc $\alpha = \beta$ et $V = \{\alpha\}$, donc (u_n) converge.

Résumé de la partie technique de la preuve: On veut arriver à une absurdité en montrant que K contient une valeur d'adhérence α de (u_n) . Pour ça on veut montrer qu'il existe toujours un élément de la suite arbitraire qui reste dans K . Puis on utilise la compacité de K pour conclure.