

Théorème de Lie-Kolchin

[J.J. Wilson], Algèbre Linéaire, Ulm, 1978

Thm: Tout sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est triangulisable.

Preuve: L'idée est de faire une récurrence sur la dimension. Évidemment si $n=1$ le thm est vrai.

Dans la suite on va chercher à exhiber un vecteur $w \in \mathbb{C}^n$ non trivial et G -stable.

En effet, si $\mathbb{C}^n = W + W'$ avec une base adaptée à la décomposition, alors tout élément $g \in G$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \rho(g) & * \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix}$ où $\rho(\text{resp } \rho')$ est un morphisme continu de $GL_n(\mathbb{C})$ vers $GL(W)$ (resp. $GL(W')$). Alors $\rho(G)$ (resp. $\rho'(G)$) est un sous-groupe connexe résoluble de $GL_{\dim(W)}(\mathbb{C})$ (resp. $GL_{\dim(W')}(\mathbb{C})$) donc on peut trianguliser par récurrence et concaténer les bases obtenues pour conclure. (⊗ car $W' \simeq \mathbb{C}^m$ et comme g stabilise W , il induit un auto $\bar{g}$ sur le quotient)

- Si G est abélien, lemme usuel (les espaces propres sont stabilisés)
- Si G non-abélien, soit $l > 1$ son degré de résolubilité, et $H := \mathcal{D}^{l-1}(G)$.

H est donc abélien, donc triangulisable dans une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

En particulier e_i est un vecteur propre de tout élément de H . On va montrer que pour $h \in H$ fixé, tous les vecteurs propres qui sont communs à tout h' de H le sont pour une même valeur propre.

Soit $V = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \forall h \in H, v \text{ vecteur propre de } h\}$. $V \neq \emptyset$ car $e_1 \in V$.

- V est G -stable: $\forall h \in H, \forall v \in V, \forall g \in G, hg(v) = g g^{-1} h g(v) = g(\lambda_g \cdot hg(v)) = \lambda_g \cdot hg(g(v))$ donc $g(v) \in V$.
 $\varphi \quad \in H$ car un groupe dérivé est normal au caractèreistique.

- Soit $h \in H$. L'application
 Soit $v \in V$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & H \xrightarrow{\lambda_v} \mathbb{C}^* \\ g & \mapsto & g^{-1} h g \mapsto \lambda_g \cdot h g \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{est continue comme composée d'app} \\ \text{continues.} \end{array}$$

En effet, la conjugaison est continue, et pour $u \in \mathbb{C}^n$ ouvert,

$$\Lambda_g^{-1}(u) = \{h \in H \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, h(u) = \lambda u\} = \{h \in H \mid h(u) \in \lambda u\} = \Lambda_u^{-1}(u) \text{ ouvert car } \varphi_v \text{ continue}$$

donc Λ_g continue. (λu ouvert)

Donc $\varphi(G)$ est connexe et $\varphi(G) \subset \text{Sp}(h)$ disjoint donc $\varphi(G) = \{\lambda\}$ ou $\varphi(e) = h \cdot v = \lambda v$, c'est ce qu'on voulait montrer.

En particulier on a montré $\forall g \in G, g^{-1} h g(v) = \lambda v$ donc $hg(v) = \lambda g(v)$. Donc $\text{Vect}(G \cdot v)$ est un espace propre associé à λ pour h .

• Soit maintenant $W = \text{Vect}(G \cdot e_1)$. $W \neq \{0\}$ puisque $e_1 \in W$, W est G -stable puisqu'engendré par des éléments G -stables.

Par l'absurde, si $W = \mathbb{C}^n$, alors comme W est un espace propre pour tout élément de H , donc H est constitué d'homothéties. Or les éléments de H sont des commutateurs, donc sont de déterminant 1, donc $H \subset \mu_n I_n$, donc H est discret.

Or le groupe dérivé d'un groupe connexe et compact, donc H est connexe.

Détail: Soit G connexe. Alors $G \times G$ connexe. L'app $\varphi: G \times G \rightarrow G$ est continue
 $(g, g) \mapsto g \cdot g g^{-1} g^{-1}$

donc $S := \{\text{commutateurs de } G\}$ est connexe.

Si on note $S_m = \{s_1 \dots s_m\}, s_i \in S, m \geq 1$, on a $S_m = \gamma_m(S^m)$ où

$\gamma_m: S^m \rightarrow S_m$
 $(s_1, \dots, s_m) \mapsto s_1 \dots s_m$. Comme γ_m continue et S^m connexe, S_m connexe.

Enfin, $S = \{e\} \cup \bigcup_{m \geq 1} S_m$ connexe comme union de connexes qui contiennent tous e .

Ainsi nécessairement $H = \{I_n\}$, absurde car $H = \mathcal{D}^{l-1}(G)$.

Donc $0 < \dim W < n$ et on a fini, Yay!