

$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

Déf: On considère la $\mathbb{R}$ -algèbre présentée $\mathcal{H} := \{i, j, k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ ("corps" des quaternions par commutativité)

Elle se réalise aussi matriciellement: $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$, avec pour base

$$1 = I_2, \quad i := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On introduit une norme: $\forall h \in \mathcal{H}, N(h) = \det(h) = |a|^2 + |b|^2$ $SO_3 = \{h \in \mathcal{H} \mid N(h) = 1\} \cong \mathbb{S}^3$

On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des quaternions purs: $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$

Lemma: i) $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$ ii) $\forall h, h' \in \mathcal{H}, \overline{hh'} = \overline{h'} \overline{h}$ (où $\overline{x+iy+jz+kt} = x-iy-jz-kt$)
 iii) $h \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{h} = h$. iv) $h \in \mathbb{H} \Leftrightarrow h \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{h} = -h$ v) $N(h) = h\overline{h} = \overline{h}h = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, t \in \mathbb{R}$ vi) $N(hh') = N(h)N(h')$

Preuve: i) (ii) facile. (iii) la transconjugaison est un automorphisme (sans calcul...) v) calcul

vi) $h \in \mathcal{H} = \lambda S$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $S \in SO_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$, donc $\det(h) = \lambda^2$. Alors

$$\overline{h}h = \lambda^2 S^* S = \lambda^2 I_2 = \det(h) = N(h), \text{ idem pour } h\overline{h}. \quad \text{vii) } \det(AS) = \det(A)\det(S) = 1$$

• En particulier, $\mathcal{H}$ sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ avec, $\forall h \neq 0, h^{-1} = \frac{1}{N(h)} \overline{h}$

Prop: $\mathbb{Z}(\mathcal{H}) = \mathbb{R}I_2$ Preuve: $\Rightarrow$ évident $\Leftarrow h = xiy + jy + kt \in \mathbb{Z}(\mathcal{H})$. Alors $hi = ih, hj = jh$ et $hk = kh$
 $\Rightarrow y = -y, z = -z, t = -t$

Thm: $SO_3 \cong \mathbb{S}^3$

Dém: • On va chercher à construire un morphisme $\Psi: SO_3 \rightarrow SO_3$, montrer qu'il est surjectif puis obtenir un isomorphisme par passage au quotient avec le noyau.

• Tout part de la norme $N(h) = h\overline{h}$ qui est une forme quadratique (de forme bilinéaire associée $\langle h, h' \rangle = \frac{1}{2}(h\overline{h'} + h'\overline{h})$)

Pour cette norme, la base $(1, i, j, k)$ est orthogonale, donc $\mathcal{H} = \mathbb{R}^4$ (on note $\mathbb{R}$ pour $\mathbb{R}I_2$)

On a une action $SO_3 \curvearrowright \mathcal{H}$ donnée par $\Psi: SO_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$
 $h \mapsto \Psi_h: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
 $u \mapsto hu h^{-1}$

Les Ψ_h sont linéaires et conservent la norme. De plus, comme $\mathbb{R} = \mathbb{Z}(\mathcal{H})$, $\Psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et donc l'action

stabilise aussi $\mathbb{R}^+ = \mathbb{S}$. On peut donc considérer l'action sur $\mathbb{S}$: $\Psi: SO_3 \rightarrow O(\mathbb{S})$
 $h \mapsto \Psi_h: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$
 $u \mapsto hu h^{-1}$

En fixant une base, on a $O(\mathbb{S}) \cong O_3$ et donc finalement $\Psi: SO_3 \rightarrow O_3$

Comme $SL_2 \cong \mathbb{P}^3$ est connexe et que φ est continue, $\varphi(SL_2)$ connexe. Comme $I_2 \in \varphi(SL_2) \subset O_3$, on a donc $\varphi(SL_2) \subset SO_3$. Reste à montrer la surjectivité.

Pour cela on utilise le fait que SO_n (et a fortiori SO_3) est engendré par les rotations, i.e. les applications dont la matrice dans une certaine base est $(I_{n-2} \quad I_2)$.

Soit $h \in \mathfrak{g} \cap \mathbb{P}^3$ (On utilise le fait $SO_3 \cong SO(\mathbb{H})$) et π_h le rotation d'axe $\mathbb{R}h$.

Notons $\varphi_h = \varphi|_h$, i.e. $\begin{cases} 1) \varphi_h(h) = h \\ 2) \langle h, h' \rangle = 0 \Rightarrow \varphi_h(h') = -h' \end{cases}$

1) clair car $\varphi_h(h) = h h h^{-1} = h$.

2) Soit h' orthogonal à h . Alors $h'h + h'h' = 0$. Or $h, h' \in \mathfrak{g}$, d'où $h'(-h) + h(-h') = 0$

d'où $h h' h^{-1} = -h'$ Yay!

Donc $\varphi: SL_2 \twoheadrightarrow SO_3$.

Enfin, le noyau de φ est l'intersection du centralisateur de $\mathfrak{g}$ avec $\mathbb{P}^3$, donc $\mathbb{Z}(H) \cap \mathbb{P}^3$

Autrement dit, $\ker \varphi = \{\pm I_2\}$, d'où φ est surjectif car φ a une structure bilinéaire ?
 (ou "commutant")
 puisqu'on a une structure bilinéaire ?
 par passage au quotient!

$$\boxed{\begin{matrix} \varphi \\ \text{sur} \\ \mathbb{P}^3 / \{\pm I_2\} \end{matrix} \xrightarrow{\sim} SO_3}$$