Contrôle Continu 1 - Algèbre 2

24/02/2026 - 1 heure - Documents interdits

Toutes les réponses devront être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. (2pts) **Bon courage !**

Exercice 1 : Questions de cours (6pts)

1 - (2 pts) Donner la définition d'un morphisme de groupes. Montrer qu'un morphisme de groupes est injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre.

2 - (3pts) Démontrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les ensembles $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est principal.

3 - (1 pt) Énoncer le théorème de division euclidienne dans un anneau de polynômes $A[X]$. (*On ne demande pas de démonstration du résultat.)*

Exercice 2 : Vrai/faux (6 pts)

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux. **Toutes les réponses doivent être justifiées pour rapporter des points.**

1 - (1.5 pts) L'ensemble $(\mathbb{R}_3[X], +, \times)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels muni de l'addition et de la multiplication de polynômes usuelles est un anneau.

2 - (1.5 pts) Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, alors $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau intègre.

3 - (1.5 pts) Soit G un groupe fini de cardinal n. Si $d \in \mathbb{N}^*$ est un diviseur de n, alors il existe $g \in G$ tel que l'ordre de g soit d.

4 - (1.5 pts) Il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $17x + 25y = 367$.

Exercice 3 : (6 pts)

Soient $S(X) = X^2 - 1$ et $T(X) = X^2 + X - 6 \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes à coefficients réels.

1 - (1 pt) Calculer le PGCD entre S et T.

2 - (1 pt) En déduire que $(S) \cap (T) = (ST)$.

On considère les morphismes de projection

$$\pi_S : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]/(S), \quad \pi_T : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]/(T).$$

3 - (1.5 pts) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T) \\ P & \longmapsto & (\pi_S(P)\ ,\ \pi_T(P)) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux. (*Il n'est pas attendu de remontrer que les morphismes π_S et π_T sont des morphismes d'anneaux.*)

4 - (2.5 pts) **(Dans cette question comme dans les autres, toute trace de recherche sera valorisée !)** Montrer qu'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{R}[X]/(ST) \simeq \mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T).$$

Correction

Exercice 1 : Questions de cours

1 - Soient G_1 et G_2 deux groupes. Une application $\varphi : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes si

$$\forall a, b \in G_1, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

En notant e_1, e_2 les éléments neutres des deux groupes, on a en particulier

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_1 e_1^{-1}) = \varphi(e_1)\varphi(e_1)^{-1} = e_2.$$

Si φ est injectif, on a donc $\ker(\varphi) = \{e_1\}$.

Réciproquement, si $\ker(\varphi) = \{e_1\}$, alors pour tous $a, b \in G_1$,

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(aa^{-1}) = \varphi(ba^{-1}) \Rightarrow e_1 = ba^{-1} \Rightarrow a = b.$$

2 - Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$. Sinon, soit n le plus petit élément strictement positif dans H. Alors $n\mathbb{Z} \subset H$, et si $p \in H$, $p > n$, alors le reste de la division euclidienne de p par n appartient à H. Comme n est le plus petit élément positif de H, nécessairement ce reste est nul, donc $p \in n\mathbb{Z}$. De même, comme $p \in H \Leftrightarrow -p \in H$, on a $H \subset n\mathbb{Z}$, et finalement par double inclusion $H = n\mathbb{Z}$.

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont en particulier des sous-groupes, donc par ce qui précède ils sont tous nécessairement de la forme $n\mathbb{Z}$ et sont donc tous engendrés par un seul élément (n), donc l'anneau $\mathbb{Z}$ est principal.

3 - Soit $A[X]$ un anneau de polynômes, soient $P_1, P_2 \in A[X]$ avec P_2 unitaire. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in A[X]$ tel que $P_1 = P_2 Q + R$, avec $\deg(R) < \deg(P_2)$ et .

Exercice 2 : Vrai/Faux

1 - FAUX. L'ensemble n'est pas stable par multiplication (par exemple, $X^2 \times X^2 \notin \mathbb{R}_3[X]$).

2 - VRAI. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $ab = 0$. Alors si a est non nul, il est inversible et $a^{-1}ab = b = a^{-1}0 = 0$, donc $b = 0$. De même, si $b \neq 0$, alors $a = 0$.

3 - FAUX. Attention à ne pas confondre avec le théorème de Lagrange, qui dit le contraire : si $x \in G$, alors $o(x) | \sharp G$. La réciproque est bien sûr fausse, il suffit par exemple de trouver un groupe fini de cardinal n non cyclique pour assurer qu'il ne contient pas d'élément d'ordre n. On peut penser à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou encore à un groupe de permutations.

4 - VRAI. Comme 17 et 25 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u, v tels que $17u + 25v = 1$. En posant $x = 367u$ et $y = 367v$, on a la solution cherchée.

Exercice 3 :

1 - Plusieurs façons de faire. Soit on calcule le PGCD entre S et T, soit on remarque que $S(X) = (X-1)(X+1)$ et $T(X) = (X-2)(X+3)$. Comme ils sont scindés et qu'ils n'ont aucune racine en commun, ils sont premiers entre eux : leur PGCD vaut 1.

2 - Soit $P \in (ST)$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QST$, donc S divise P et T divise P, donc $P \in (S) \cap (T)$.

Réciproquement, soit $P \in (S) \cap (T)$. Alors il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = Q_1 S = Q_2 T.$$

Ainsi, S divise $Q_2 T$, et comme S et T sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, S divise Q_2. On a donc l'existence d'un Q_3 tel que

$$P = Q_3 ST,$$

donc $P \in (ST)$.

Finalement, on a bien $(ST) = (S) \cap (T)$.

3 - Comme les deux applications π_S et π_T sont des morphismes d'anneaux, on a pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}\varphi(P+Q) &= (\pi_S(P+Q), \pi_T(P+Q)) \\ &= (\pi_S(P) + \pi_S(Q), \pi_T(P) + \pi_T(Q)) \\ &= (\pi_S(P), \pi_T(P)) + (\pi_S(Q), \pi_T(Q)) \\ &= \varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\varphi(P \cdot Q) &= (\pi_S(P \cdot Q), \pi_T(P \cdot Q)) \\ &= (\pi_S(P) \cdot \pi_S(Q), \pi_T(P) \cdot \pi_T(Q)) \\ &= (\pi_S(P), \pi_T(P)) \cdot (\pi_S(Q), \pi_T(Q)) \\ &= \varphi(P) \cdot \varphi(Q).\end{aligned}$$

Enfin,

$$\varphi(1) = (\pi_S(1), \pi_T(1)) = (\bar{1}, \bar{1}),$$

qui est bien le neutre multiplicatif de $\mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T)$.

φ est donc bien un morphisme de groupes.

4 - On veut montrer un isomorphisme où l'un des deux termes est un quotient, on a donc envie d'utiliser le 1er théorème d'isomorphisme. L'énoncé nous suggère déjà un morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T)$.

D'abord, en vertu de la question 2, on a bien $\ker(\varphi) = (ST)$.

Reste à voir que φ est surjectif. Pour ça, soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T)$. On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P) = (A, B)$. Comme $S \wedge T = 1$, par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $SU + TV = 1$. On a alors $SUA + TVA = A$ et $SUB + TVB = B$. En particulier, on a donc

$$\pi_S(SUA + TVA) = \pi_S(TVA) = \pi_S(A) = A$$

et

$$\pi_T(SUB + TVB) = \pi_T(SUB) = \pi_T(B) = B.$$

En posant $P = SUB + TVA$, on a donc bien $\varphi(P) = (A, B)$.

Le morphisme φ est donc surjectif, de noyau (ST), donc par le premier théorème d'isomorphisme, il existe un isomorphisme $\bar{\varphi} : \mathbb{R}[X]/(ST) \to \mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T)$.

Remarque : on a en fait redémontré un cas particulier du dernier exercice de la deuxième feuille de TD sur le lemme chinois généralisé, la démonstration est essentiellement la même. L'hypothèse "$(S) + (T) = \mathbb{R}[X]$" provient du théorème de Bézout, puisque S et T sont premiers entre eux.