

Contrôle Continu 1 - Algèbre 2

24/02/2026 - 1 heure - Documents interdits

Toutes les réponses devront être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. (2pts) Bon courage !

Exercice 1 : Questions de cours (6pts)

- 1 - (2 pts) Donner la définition d'un morphisme de groupes. Montrer qu'un morphisme de groupes est injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre.
- 2 - (3pts) Démontrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les ensembles $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est principal.
- 3 - (1 pt) Énoncer le théorème de division euclidienne dans un anneau de polynômes $A[X]$. *(On ne demande pas de démonstration du résultat.)*

Exercice 2 : Vrai/faux (6 pts)

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux. **Toutes les réponses doivent être justifiées pour rapporter des points.**

- 1 - (1.5 pts) L'ensemble $(\mathbb{R}_3[X], +, \times)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels muni de l'addition et de la multiplication de polynômes usuelles est un anneau.
- 2 - (1.5 pts) Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, alors $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau intègre.
- 3 - (1.5 pts) Soit G un groupe fini de cardinal n . Si $d \in \mathbb{N}^*$ est un diviseur de n , alors il existe $g \in G$ tel que l'ordre de g soit d .
- 4 - (1.5 pts) Il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $17x + 25y = 367$.

Exercice 3 : (6 pts)

Soient $S(X) = X^2 - 1$ et $T(X) = X^2 + X - 6 \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes à coefficients réels.

- 1 - (1 pt) Calculer le PGCD entre S et T .
- 2 - (1 pt) En déduire que $(S) \cap (T) = (ST)$.

On considère les morphismes de projection

$$\pi_S : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]/(S), \quad \pi_T : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]/(T).$$

- 3 - (1.5 pts) Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T) \\ P & \longmapsto & (\pi_S(P), \pi_T(P)) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux. *(Il n'est pas attendu de remonter que les morphismes π_S et π_T sont des morphismes d'anneaux.)*

- 4 - (2.5 pts) **(Dans cette question comme dans les autres, toute trace de recherche sera valorisée !)** Montrer qu'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{R}[X]/(ST) \simeq \mathbb{R}[X]/(S) \times \mathbb{R}[X]/(T).$$