

Questions de cours : (3 points)

- 1) Énoncer la formule de Bayes (choisissez votre version préférée, **attention à bien introduire tous les objets de la définition!**).
- 2) Donner la définition du classifieur de Bayes d'une variable Y à partir d'une variable qualitative X .
- 3) Donner la formule de la variance d'une variable aléatoire continue X .

Exercice : (7 points)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que la densité de X est alors donnée par la fonction définie sur $[0, \infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

- 1) **(2 points)** Démontrer que l'espérance de X vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un échantillon i.i.d de cette loi X .

- 2) **(1 point)** Justifier qu'un réel $\hat{\lambda}$ maximise la vraisemblance $V(x_1, \dots, x_n; \lambda)$ si et seulement si il maximise la log-vraisemblance $L(x_1, \dots, x_n; \lambda)$.
- 3) **(2 points)** Calculer la log-vraisemblance $L(x_1, \dots, x_n; \lambda)$.
- 4) **(2 points)** En déduire que le maximum de vraisemblance est atteint pour la valeur

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$